УДК 37.02
372.8

ОСОБЕННОСТИ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗАДАЧ

К.А. Паладян, Е.Ю. Федина

THE SPECIFICS OF PREPARING STUDENTS TO USE MATHEMATICAL MODELING IN THE PROCESS OF SOLVING PRACTICE-ORIENTED PROBLEMS

K.A. Paladyan, E.Y. Fedina

Аннотация. Особенностью реализации актуального сегодня практико-ориентированного обучения является применение для решения конкретных ситуаций и проблем реальной действительности обобщенных знаний и умений. Реализовать такое обучение можно с помощью специально подобранных практико-ориентированных заданий. Прикладная и практическая направленность не являются новыми аспектами в математической подготовке школьников. Под практико-ориентированной задачей понимается сюжетная задача, фабула которой раскрывает приложения математики в окружающей нас действительности, в смежных дисциплинах, знакомит ее с использованием в организации, технологии и экономике современного производства, в сфере обслуживания, в быту, при выполнении трудовых операций. В процессе решения таких задач реализуются этапы метода математического моделирования. Методическая подготовка будущего учителя математики должна включать овладение методом математического моделирования и методикой его использования в учебном процессе в школе, а также методикой обучения учащихся решению практико-ориентированных задач. В статье рассмотрено содержание такой подготовки.

Abstract. The use of generalized knowledge and skills to solve specific situations and problems of reality is a distinctive feature of the implementation of the current practice-oriented training. It is possible to implement such training with the use of specially selected practice-oriented tasks. Applied and practical orientation are not new aspects in the mathematical training of schoolchildren. A practice-oriented problem is referred to as a scenario problem, the plot of which reveals the applications of mathematics in the reality surrounding us; it is introduced in organizations, technology and economics of modern production, in the service sector, in everyday life, when performing labor operations. In the process of solving such problems, the stages of the mathematical modeling method are implemented. Methodological training of a future mathematics teacher should include mastering the method of mathematical modeling and the method of its use in the educational process at school, and the methods of teaching to solve practice-oriented problems. The article considers the contents of such training.

Ключевые слова: подготовка учителя, практико-ориентированное обучение, математическая задача, математическое моделирование, математическая модель.

Keywords: teacher training, practice-oriented learning, mathematical problem, mathematical modeling, mathematical model.

Изменения в целях обучения математике в вузе и школе, ориентация на практическую направленность познавательной деятельности обучающихся, смещение ожидаемых результатов от ЗУНов к компетенциям поставило ряд вопросов, требующих детализации, уточнения, конкретизации, точности терминологии, изучения исторических аспектов поставленных проблем, а главное – подготовки к их решению будущего учителя. Современный специалист должен владеть математическими методами исследования, в том числе математического моделирования, а также знать их возможности.

Методы математического моделирования студенты осваивают в процессе предметной подготовки. Их востребованность при решении задач в школе приводит к необходимости расстановки новых акцентов при изучении соответствующих специальных дисциплин, в частности, расширения базы задач с моделированием, направленных на решение практических проблем. Осуществить это можно при изучении студентами как основных математических дисциплин, так и дисциплин по выбору. Рассмотрим содержание такой подготовки.

Под математическим моделированием мы полагаем использование в роли специфического средства исследования оригинала его *математической модели,* изучая которую можно получить новую информацию об объекте познания, о его закономерностях. Предметом исследования при математическом моделировании выступает система «оригинал – математическая модель» [3]. В этом случае системообразующей связью является изоморфизм структур оригинала и модели. Структура выступает инвариантным аспектом системы, который раскрывает механизм ее функционирования (Н.Ф. Овчинников). Мы знаем, для того, чтобы математически исследовать процессы и явления, которые происходят в реальности, нужно уметь их описывать на математическом языке, или, иначе, построить математическую модель явления.

Математическая модель – это описание того или иного процесса действительности или определенной исследуемой ситуации на языке математических понятий, формул и отношений [4]. Математическое моделирование выступает как важный вид знакового моделирования, оно реализовывается с помощью средств языка математики. Знаковые образования и их элементы всегда рассматривают с определенными преобразованиями, операциями над ними, выполняемые человек или машиной (преобразования математических, логических, химических формул и т. п.).

Благодаря использованию методов математического моделирования при решении задач по алгебре, математическому анализу и др., а также в рамках практикума решения школьных математических задач и задач повышенной сложности, развиваются творческие способности будущего специалиста, происходит подготовка к решению целого рядя профессиональных задач. Лишь глубокое понимание сути математического моделирования дает возможность правильно применять этот метод в профессиональной деятельности.

Метод математического моделирования заключается в следующем. Для исследования переделённого объекта выбирают или строят объект, похожий в том или ином отношении на тот, который мы исследуем. Потом изучают построенный объект и с его помощью решают исследуемые задачи. Итоги этих задач переносятся на изначальный объект.

Обычно, процесс моделирования включает *следующие этапы* [3]: ставится задача и определяется свойства оригинала, которые необходимо исследовать; констатация затруднительности или невозможности исследования оригинала; отбор модели, которая лучше всего фиксирует важные свойства оригинала и проще поддается исследованию; исследование модели, соответствуя поставленной задачей; перенос итогов исследования модели на оригинал; проверка полученных результатов.

Современный подход к подготовке будущего учителя математики целесообразнее основывать на более современной схеме процесса математического моделирования, состоящего из **трех этапов** [2]:

1) перевод задачи с естественного языка на математический, иначе построение математической модели задачи *(формализация)*;

2) решение задачи, не выходя за рамки математической теории *(решение внутри модели)*;

3) перевод получившегося результата (математического решения) на язык задачи *(интерпретация полученного решения)*.

Более важным и трудным выступает **первый этап** – построение математической модели. Он реализовывается логическим путем, основываясь на глубоком анализе изучаемого явления (процесса), и нуждается в умении описывать явление (процесс) на математическом языке.

Процесс создания модели делится на несколько *шагов.*

Первый шаг – индуктивный, это отбор наблюдений, которые относятся к процессу, который требует составления модели. Данный этап заключается в формулировке проблемы, конкретно – в понимании, что необходимо принять во внимание, а что можно отбросить.

Второй шаг – это переход от определения проблемы к построению неформальной модели. Неформальная модель – описание процесса, способное пояснить отобранные нами результаты наблюдений, но тоже недостаточно строго, и нет возможности точно осуществить проверку степени логической взаимосвязи его свойств. На этой стадии производится поиск разных способов установления логического соответствия между моделью и действительностью.

Третий шаг заключается в переводе неформальной модели в математическую модель. В этот перевод входит рассмотрение словесного описания неформальной модели и отыскание математической структуры, которая способна отобразить процессы, которые изучаются.

Второй этап – это этап решение задачи в рамках математической теории. Его также можно назвать этапом математической обработки формальной модели. Он – решающий в математическом моделировании, поскольку именно на этом этапе применяется весь спектр математических методов – логических, алгебраических, геометрических и т. д. – для формального вывода нетривиальных следствий из исходных допущений модели.

Во время **заключительного этапа** моделирования выводы, которые мы получили, подвергаются процессу перевода с языка математики обратно на естественный язык.

Будущий учитель математики при отборе задач для формирования у школьников умения проводить математическое моделирование решения задачи необходимо соблюдение следующих требований к используемым моделям:

• модели необходимо разумно отражать самые существенные (с точки зрения определенной постановки задачи) свойства объекта, исключая его несущественные свойства;

• модель должна иметь определенную область применимости, которая обусловлена принятыми при её построении допущениями;

• модель должна давать возможность получать новые знания об объекте, который изучается.

Разберем на примере школьной задачи реализацию трех этапов процесса математического моделирования, знание о которых должен получить учащийся.

Задача 1. Два автомобиля выехали одновременно из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 540 км. Первый автомобиль ехал со скоростью, на 10 км/ч большей, чем второй, и прибыл в пункт В на 45 мин раньше второго. Найдите скорость каждого автомобиля.

<u>1 этап.</u> Формализация. Нужно посторожить математическую модель задачи.

Примем за x км/ч скорость второго автомобиля, значит, скорость первого автомобиля будет равна $(x+10)$ км/ч.

$\frac{540}{x}$ ч. – время, которое затрачено на весь путь вторым автомобилем.

$\frac{540}{x+10}$ ч.– время, затраченное на весь путь первым автомобилем.

Сказано, что второй автомобиль потратил на путь на 45 мин больше первого.

45 мин. $= \frac{3}{4}$ ч.

$\frac{540}{x} - \frac{540}{x+10} = \frac{3}{4}$ – полученное уравнение – математическая модель задачи.

<u>2 этап.</u> Внутримодельное решение.

Перенесем слагаемые в левую часть $\frac{540}{x} - \frac{540}{x+10} - \frac{3}{4} = 0$

Приведем слагаемые к общему знаменателю: $\frac{-3x^2 - 30x + 21600}{4x(x+10)} = 0$.

Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Получим систему:

$$\begin{cases} -3x^2-30x+21600=0 \\ 4x(x+10)\neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+10x+7200=0 \\ 4x(x+10)\neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=80 \\ x=-90 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\neq 0 \\ x\neq -10 \end{array}\right. \end{cases}$$

Известно, что $x_1=80$ и $x_2=-90$.

<u>3 этап.</u> Интерпретация. Переведем результат с математического языка на естественный язык задачи.

Скорость автомобиля не может быть отрицательной, поэтому, условию задачи соответствует только один корень $x_1=80$, значит, скорость второго автомобиля равна 80 км/ч, а скорость первого 90 км/ч.

Студент должен осознать, что ему необходимо добиться от учеников четкого понимания значения и содержания каждого этапов процесса математического моделирования. Это важно, чтобы учащиеся осознавали, что им предложена для решения не просто математическая задача, а определенная жизненная ситуация, решаемая математическими методами. Так студенты (будущие учителя) помогут школьникам увидеть в математике практическое значение.

Приведем решение еще одной задачи с использованием моделирования, реализующей еще и межпредметные связи с географией. Например, в 5 классе, анализируя задачу № 59 [1, с. 19]: «Длина Волги 3 530 км Днепр на 1 330 км короче Волги, а Урал длиннее Днепра на 228 км. Какова длина реки Урал?», учащиеся могут использовать схематический чертеж. Обычно записывают задачу кратко примерно так:

длина Волги – 3 530 км;

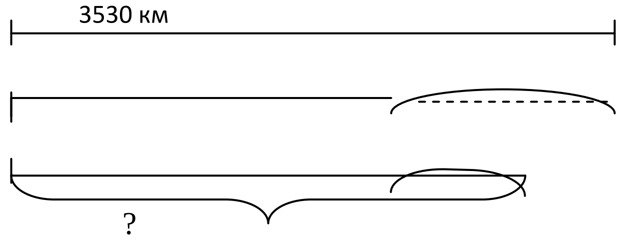
длина Днепра – ?, на 1 330 км короче Волги;

длина Урала – ?, на 228 км длиннее Днепра.

Такая запись при первичном анализе задачи не является рациональной, так как не раскрывает наглядно взаимодействия между данными и искомыми, не помогает в выборе действия.

Учащимся предлагается смоделировать условие задачи следующим образом:

длина Волги –
1 330 км
длина Днепра –
228 км
длина Урала –



Эта модель дает наглядное представление об отношениях между данными и искомыми в задачах. Анализируя задачу, учащиеся выясняют, что Днепр на 1 330 км короче Волги, то есть столько же, но без 1 330; поэтому отрезок на схеме, изображающий длину Днепра, они начертят короче отрезка, показывающего длину Волги. А так как Урал длиннее Днепра на 228 км, то есть столько же и еще 228; то и отрезок, показывающий длину Урала, должен быть длиннее отрезка, показывающего длину Днепра.

Возможно применение в учебном процессе различных видов вспомогательных моделей: рисунок, краткая запись, таблица, чертёж, схема. Проводя рассуждения «от данных к вопросу», имеем схему, называемую моделью поиска решений данной задачи. Проводя рассуждения «от вопроса к данным» (блок-схема), модель будет выглядеть иначе. Схема – это чертёж, где все взаимосвязи и взаимоотношения величин изображены приблизительно.

Студенты-математики должны знать, что моделированию присущи разные математические объекты. Например, числовые формулы, числовые таблицы, буквенные формулы, функции, уравнения, алгебраические или дифференциальные, и их системы, неравенства, системы неравенств, ряды, геометрические фигуры, диаграммы Венна, графы.

Во время построения модели применяются следующие операции мышления: анализ через синтез, сравнение, классификация, обобщение. Составление математической модели задачи, перевод задачи на математический язык подготавливает обучающихся к моделированию реальных процессов и явлений в их предстоящей деятельности.

Овладение универсальными навыками моделирования подразумевает поэтапное освоение будущими учителями и некоторыми предметными умениями. Например, представление задачи в виде таблицы или схемы, числового выражения или формулы (уравнения), чертежа. Появляется умение переходить от одной модели к другой.

Обучение учащихся навыкам элементам математического моделирования начинается чуть ли не с начальной ступени обучения, а более обширно – позже, так как на старшей ступени обучения это связано с решением текстовых задач. Владение навыками решения задач является одним из критериев сформированности умения моделировать, помимо этого оно выступает мотивационной составляющей процесса обучения.

Нужно заметить, что представление учащихся о моделировании и моделях не совсем ясное. Обучающиеся не владеют информацией, что они изучают модели, так как их программы и учебники практически лишены понятий «модель» и «моделирование». При изучении математического моделирования ученики знакомятся с теоретическими фактами, формулируют основные математические понятия, применяют математические факты на практике.

Обучение, которое содержит применение моделирования, активизирует мыслительную деятельность обучающихся, помогает понять задачу, самостоятельно найти более удобный и верный ход решения, определить необходимый способ проверки, установить условия, выяснить, когда у задачи есть решение или его нет. Поэтому включение моделирования в учебный процесс делает его более рациональным, а также активизирует познавательную деятельность обучающихся старшей ступени. Широкое использование моделирования является одним из эффективных методических средств развивающего обучения математике.

Важно, чтобы студенты хорошо представляли внутрипредметные связи, тем более что математика изучается во всех классах. И.Г. Обойщиковой предложено обучать учеников приему моделирования по этапам [5]. В начальных классах – неявно, только напоминая, что при замене данных задачи значками или графической схемой мы используем модели, главное – на этом этапе нужно обучить детей действиям, которые входят в «ядро» моделирования, а именно: умение сопоставлять объекты, умение противопоставлять объекты, умение сравнивать объекты путем сопоставления или противопоставления, умение абстрагироваться, умение обобщать объекты. В 5 классе уже можно говорить о математических моделях и о математическом моделировании, объясняя его сущность, формируя операции, которые входят в «оболочку» моделирования, такие как умение строить модель, умение проводить преобразования модели и умение ее конкретизировать. На этапе 6 класса ученики уже должны самостоятельно использовать этот прием в простых случаях. В 5–6 классах далеко не все авторы применяют моделирование, решая текстовые задачи. Специальная методика формирования приема моделирования для названной ступени обучения недостаточно развита и находится в разработке. Но нужно отметить, что вопросы моделирования в обучении становятся все более значимыми.

Таким образом, использование моделей при решении задач обеспечит их качественный анализ, осознанный поиск их решения, обоснованный выбор арифметического действия, рациональный способ решения и предупредит многие ошибки в решении задач учащимися. Модель задачи может быть применена и для составления и решения обратных задач, для проведения исследования в задаче. Модель помогает поставить условия, при которых задача имеет решение или не имеет решения; выяснить, как изменяется значение искомой величины в зависимости от изменения данных величин; помогает обобщить теоретические знания; развивает самостоятельность и вариативность мышления.

На решение текстовых задач отведено довольно много времени в курсе математики. Но актуальность выбранной нами темы исследования определяется тем, что, как показывает практика обучения и анализ результатов экзаменационных работ выпускников и абитуриентов, умение решать задачи оставляет желать лучшего. Находясь на педагогической практике, студенты выяснили, что не все учащиеся основной школы владеют навыками решения текстовых задач даже на базовом уровне. Особенно это относится к задачам на построение математической модели, что вызывает у школьников немалые затруднения. Программа обучения математике, которая действует на данный момент, нуждается в большей ориентации на развитие самостоятельности обучающихся в области решении текстовых задач. При этом, как показывает практика, требования программы реализовываются не в полной мере, что приводит к проблемам в знаниях и несформированности у детей нужных умений.

Отметим, что составляющей математического образования выступает новое представление о предмете математики. Основу содержания учебников сегодня должны составлять разработка схем, моделей, их вариаций, конструирование моделей по изученным схемам, приложение разработанных схем в обучении. Чтобы отметить общие черты действий, которые усваивают учащиеся, необходимо перейти к действиям с моделями, которые освобождены от всех лишних свойств, кроме тех, которые нужны.

Одной из целей обучения теории и методики обучения математике сегодня является подготовка студентов к формированию у обучающихся умений строить математические модели несложных явлений действительности; уметь исследовать заданные модели; создавать приложения моделей; приобщать обучающихся к творческой деятельности.

Проблема модернизации образования требует внимания как к теории, так и к практике, особенно со стороны реализации творческой познавательной деятельности обучающихся. Моделирование – один из важнейших методов научного познания, а также одно из мощных средств активизации обучающихся в процессе обучения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математика, 5 класс : учебник для 5 кл. общеобразовательных учреждений / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбург. – 29-е изд., стер. – М. : Сайтком, 2012. – 358 с. – Текст : непосредственный.

2. Демидова, Т. Е. Теория и практика решения текстовых задач : пособие для студентов высших педагогических учебных заведений / Т. Е. Демидова, А. П. Тонких. – М. : Академия, 2002. – 288 с. – Текст : непосредственный.

3. Дуев, С. И. Решение задач математического моделирования в системе MathCAD : учебное пособие / С. И. Дуев. – Казань : Казанский национальный исследовательский технологический университет, 2017. – 128 с. – Текст : непосредственный.

4. Ляхова, Н. Е. Обучение элементам математического моделирования в процессе решения текстовых задач / Н. Е. Ляхова, С. И. Порохня. – Текст : непосредственный // Вестник Таганрогского института имени А.П. Чехова. – 2017. – № 1. – С. 243–248.

5. Обойщикова, И. Г. Обучение моделированию учащихся 5–6 классов при изучении математики : автореф. дис. ... канд. пед. наук / И. Г. Обойщикова. – Саранск, 2002. – 19 с. – Текст : непосредственный.

6. Уемов, А. И. Логические основы метода моделирования / А. И. Уемов. – М. : Просвещение, 1996. – 312 с. – Текст : непосредственный.

REFERENCES

1. Vilenkin N. Ya. Matematika, 5 klass. Uchebnik dlya 5 kl. obshcheobrazovatel'nykh uchrezhdeniy [Mathematics, 5th grade. Textbook for 5 Grade 5 of General Education Organizations]. M., Saitkom, 2012. 358 p.

2. Demidova Y. E. Teoriya i praktika resheniya tekstovykh zadach [Theory and Practice of Solving Text Problems]. M., Academia, 2002. 288 p.

3. Duev S. I. Resheniye zadach matematicheskogo modelirovaniya v sisteme MathCAD [Solving Problems of Mathematical Modeling in the MathCAD System]. Kazan: Kazan National Research Technological University, 2017. 128 p. Available at: https://www.iprbookshop.ru/79498.html. (In Russian).

4. Lyakhova N. E., Porokhnya S. I. Teaching elements of mathematical modeling in the process of solving text problems. Vestnik taganrogskogo instituta imeni A.P. Chekhova = Bulletin of Taganrog Institute Named after A.P. Chekhov, 2017, No. 1, pp. 243–248. (In Russian).

5. Oboyschikova I. G. Obucheniye modelirovaniyu uchashchikhsya 5–6 klassov pri izuchenii matematiki [Teaching Modeling to Students of Grades 5–6 in Studying Mathematics]. Diss. abstract. Saransk, 2002. 19 p.

6. Uemov A. I. Logicheskiye osnovy metoda modelirovaniya [Logical Foundations of the Modeling Method]. M., Prosveshchenie, 1996. 312 p.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СТАТЬИ

Паладян, К. А. Особенности подготовки студентов к использованию математического моделирования в процессе решения практико-ориентированных задач / К. А. Паладян, Е.Ю. Федина. – Текст : непосредственный // Вестник Армавирского государственного педагогического университета. – 2021. – № 4. – С. 73–81.

BIBLIOGRAPHIC DESCRIPTION

Paladyan K. A., Fedina E. Y. The Specifics of Preparing Students to Use Mathematical Modeling in the Process of Solving Practice-oriented problems / K. A. Paladyan, E. Y. Fedina // The Bulletin of Armavir State Pedagogical University, 2021, No. 4, pp. 73–81. (In Russian).