**УДК-512.624.3**

**Чубатов Андрей Алексеевич**
старший преподаватель кафедры математики, физики и методики их преподавания ФГБОУ ВО «Армавирский государственный педагогический университет» (г. Армавир)

**Chubatov Andrei Alexeevich**
Senior Lecturer of the Department of Mathematics, Physics and Methods of teaching, Armavir State Pedagogical University (Armavir)

# О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ СТРУКТУР (СИСТЕМ И СОВОКУПНОСТЕЙ) ПРЕДИКАТОВ И ИХ СВОЙСТВАХ

# ABOUT TRANSFORMATIONS OF STRUCTURES (SYSTEMS AND UNIONS) PREDICATES AND THEIR PROPERTIES

***Аннотация:***
*В статье рассмотрены преобразования структур (систем и совокупностей) соотношений (равенств или неравенств), которые могут пригодиться школьникам, студентам и учителям. Проводится параллель свойств этих преобразований (операций) с операциями над предикатами и множествами.*

***Abstract:***
*The transformations of structures (systems and unions) of equalities or inequalities that can be useful for schoolchildren, students, and teachers are considered in the article. A parallel of the properties of these transformations (operations) with the operations on predicates and sets is drawn.*

***Ключевые слова:***
*структура, система уравнений, система неравенств, совокупность уравнений, совокупность неравенств, предикат.*

***Keywords:***
*structure, equation system, inequality system, equation union, inequality union, predicate.*

В школьном курсе математики при решении сложных неравенств (например, иррациональных или логарифмических) приходится решать задачи, сводящиеся к решению систем или совокупностей уравнений и неравенств. Рассмотрим систему, состоящую из уравнения и неравенства

$$\begin{cases} Eq_1(x) = 0 \\ N(x) \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Если уравнение имеет несколько корней

$$Eq_1(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = b \end{array}\right., \tag{2}$$

то система преобразуется в новую систему, содержащую в качестве элементов совокупность уравнений и неравенство.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = b \end{array}\right. \\ N(x) \ge 0 \end{cases} \tag{3}$$

Для решения системы (3) достаточно «просеять» корни уравнения через неравенство. В этом случае решение исходной системы примет вид

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = a \\ N(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = b \\ N(x) \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \tag{4}$$

Таким образом, система (3) и совокупность (4) равносильны (т. е. имеют одинаковое множество корней. Учитывая предположение (2), они также равносильны системе (1).

Возникает вопрос: как можно быстро преобразовывать такие системы?

Для начала определимся с терминологией.

*Структуры предикатов*

Для систем и совокупностей подберем общий термин – структура.

**Опр.** *Структура* – это суперпозиция систем и совокупностей, состоящих из *элементов* (уравнений, неравенств).

Структуры будем обозначать заглавными латинскими буквами.

Т. к. элементы системы или совокупности могут быть уравнениями или неравенствами, хотелось бы также использовать общий термин. Мы будем использовать термин *соотношение* или *предикат*.

**Опр.** *Предикат (одноместный предикат)* – это функция с множеством значений $\{0,1\}$ (или {ложь, истина}), определённая на некотором множестве. Будем обозначать предикат строчной греческой буквой, например, $\alpha(x)$ или сокращенно $\alpha$ .

Уравнение или неравенство является частным случаем предиката, когда буквенное выражение соединено знаком отношения $(=,>,<,\ge,\le,\ne)$ с числом 0.

Решение уравнения или неравенства совпадает с *множеством истинности предиката* $I_{\alpha}(x)=\{x|\alpha(x)=1\}$.

Отметим, что структура также является предикатом, только сложным (комбинированным), составленным из простых, которые являются уравнениями или неравенствами.

*Структуры соотношений*

В качестве примеров структур предикатов (соотношений) рассмотрим следующие

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\alpha\\ \beta\end{array}\right.,\\ \gamma\end{array}\right. \tag{5}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha\\ \left\{\begin{array}{l}\beta\\ \gamma\end{array}\right.,\end{array}\right. \tag{6}$$

$$\left[\begin{array}{l}\alpha\\ \left\{\begin{array}{l}\beta\\ \gamma\end{array}\right.,\end{array}\right. \tag{7}$$

$$\left[\begin{array}{l}\alpha\\ \left[\begin{array}{l}\beta\\ \gamma\end{array}\right.,\end{array}\right. \tag{8}$$

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\alpha\\ \beta\end{array}\right.\\ \gamma\\ \left\{\begin{array}{l}\delta\\ \alpha\end{array}\right.\end{array}\right. \tag{9}$$

Рассмотрим простейшие отношения предикатов и структур.

*Отношения структур (предикатов)*

*Отношение эквивалентности (~).* Предикаты (структуры) называются *эквивалентными (равными)* $\alpha\sim\beta$, тогда и только тогда, когда их множества истинности равны $I_{\alpha}=\mathrm{I}_{\beta}$, т. е. всякое решение структуры, описываемой предикатом $\alpha(x)$, является решением структуры, описываемой предикатом $\beta(x)$, и наоборот.

*Отношения включения ($\subset, \subseteq$).* Предикат (структура) $\alpha$ (строго) включает в себя предикат (структуру) $\beta$ ($\alpha \supset \beta$) если $I_\alpha \supset \mathrm{I}_\beta$, т. е. всякое решение структуры, описываемой предикатом $\beta(x)$, является решением структуры, описываемой предикатом $\alpha(x)$. В этом случае структура $\beta$ является следствием структуры $\alpha$.

Аналогична ситуация с нестрогим включением ($\subseteq$).

Предикат (структура) $\alpha$ нестрого включает в себя предикат (структуру) $\beta$ ($\alpha \supseteq \beta$), тогда и только тогда, когда $I_\alpha \supseteq \mathrm{I}_\beta$, т. е. всякое решение структуры, описываемой предикатом $\beta(x)$, является решением структуры, описываемой предикатом $\alpha(x)$. Отношение $\alpha \subseteq \beta$ (как и отношение нестрогого неравенства ≤) означает, что либо $\alpha \subset \beta$, либо $\alpha \sim \beta$.

Выполнение отношений включения $\alpha \subseteq \beta$ и $\alpha \supseteq \beta$ равносильно эквивалентности (равенству) предикатов $\alpha \sim \beta$.

*Система и совокупность*
*как операции над предикатами (соотношениями)*

Если рассматривать систему уравнений или неравенств, то ее решением является некоторое множество (возможно пустое). В «терминах предикатов» система предикатов – это предикат, являющийся конъюнкцией (логическим умножением, операцией И) предикатов, а решение системы – это множество истинности предиката.

Так система предикатов на «языке структур» эквивалентна конъюнкции предикатов на «языке предикатов»

$$\begin{cases} \alpha(x) \\ \beta(x) \end{cases} \Leftrightarrow \alpha(x) \wedge \beta(x) \Leftrightarrow I_{\alpha \wedge \beta}$$

Аналогична ситуация с совокупностью предикатов: совокупность предикатов на «языке структур» эквивалентна дизъюнкции (логическому сложению, операции ИЛИ) предикатов на «языке предикатов».

$$\left[ \begin{array}{l} \alpha(x) \\ \beta(x) \end{array} \right. \Leftrightarrow \alpha(x) \vee \beta(x) \Leftrightarrow I_{\alpha \vee \beta}$$

Можно рассматривать объединение соотношений (предикатов) в систему или объединение в совокупность как операции. Эти операции будем считать бинарными и вместо префиксной нотации будем кратко записывать («в строчку») объединение в систему и объединение в совокупность в инфиксной нотации следующим образом $\alpha\{\beta$ и $\alpha[\beta$.

Таким образом, операции объединение предикатов в систему или объединение в совокупность являются аналогами операций объединения в систему или объединения в совокупность на множестве соотношений.

Теперь перейдем к рассмотрению свойств этих операций.

Отметим, что операции { и [ являются *замкнутыми* на множестве *соотношений (предикатов)*, т. к. результат операций конъюнкции, дизъюнкции и их комбинации (суперпозиция) над предикатами сам является предикатом.

Операции { и [ также являются идемпотентными: $\alpha\{\alpha = \alpha$ и $\alpha[\alpha = \alpha$

*Ассоциативность и коммутативность*

Структуры (6) и (8) содержат одинаковые «структурирующие операции» – объединения в систему и совокупность.

Соотношения соединяются в системы и обладают ассоциативным свойством

запись в префиксной нотации:

$$\begin{cases}\alpha \\ \begin{cases}\beta \\ \gamma\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\begin{cases}\alpha \\ \beta\end{cases} \\ \gamma\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha \\ \beta \\ \gamma\end{cases},$$

запись в инфиксной нотации:

$$\alpha\{(\beta\{\gamma) = (\alpha\{\beta)\{\gamma = \alpha\{\beta\{\gamma.$$

Аналогичной ассоциативностью обладают совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\alpha \\ \left[\begin{array}{l}\beta \\ \gamma\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\alpha \\ \beta\end{array}\right. \\ \gamma\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha \\ \beta \\ \gamma\end{array}\right.,$$

$$\alpha[(\beta[\gamma) = (\alpha[\beta)[\gamma = \alpha[\beta[\gamma.$$

Свойство коммутативности операций { и [ следует из определений системы и совокупности: как пересечения и объединения множеств истинности предикатов либо как конъюнкция и дизъюнкция предикатов.

Т. е. операции { и [ образуют со множеством предикатов абелевы (коммутативные) полугруппы по каждой из операций.

*Нейтральный элемент*

Найдем нейтральные элементы по отношению к этим операциям и получим моноид – полугруппу с нейтральным элементом.

Нейтральным элементом (нулевым) по отношению к операции [ является элемент-предикат (соотношение) тождественно ложный на всей области определения переменной $x$. Область истинности такого предиката эквивалентна пустому множеству

$$e_{[} = \phi ,$$

т. к.

$$\left[\begin{array}{l}\alpha \\ \phi\end{array}\right. \Leftrightarrow \alpha ,$$

$$\alpha[\phi = \alpha .$$

Нейтральным элементом (единичным) по отношению к операции { является элемент-соотношение, область истинности которого эквивалентна (равна) универсуму – тождественно истинный на всей области определения переменной $x$ предикат

$$e_{\{} = U ,$$

т. к.

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha \\ x \in U\end{array}\right. \Leftrightarrow \alpha ,$$

$$\alpha\{U = \alpha .$$

Т. е. операции [ и { над множеством соотношений является моноидами (полугруппами с нейтральными элементами), аналогично операциям $\cup$ и $\cap$ над множествами.

В силу невозможности определить «полноценные» (всегда и однозначно осуществляемые) операции вычитания и деления операции [ и { не образуют групп, а являются моноидами.

*Законы дистрибутивности*

Для преобразования структур (5), (7), (9) нам понадобятся законы дистрибутивности.

Так структура (5)

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\alpha \\ \beta\end{array}\right. , \\ \gamma\end{array}\right.$$

в «строчной» инфиксной записи примет вид

$$(\alpha[\beta)\{\gamma$$

Формально раскрыв скобки, получим 1-й закон дистрибутивности

$$(\alpha[\beta)\{\gamma \;\Leftrightarrow\; (\alpha\{\gamma)[(\beta\{\gamma), \tag{10}$$

который в префиксной записи примет вид

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\alpha\\ \beta\end{array}\right.\\ \gamma\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\alpha\\ \gamma\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\beta\\ \gamma\end{array}\right.\end{array}\right. \tag{11}$$

Верность 1-го закона дистрибутивности доказывается с помощью равенства предикатов

$$(\alpha \vee \beta)\wedge \gamma = (\alpha \wedge \gamma)\vee(\beta \wedge \gamma),$$

и их множеств истинности

$$I_{(\alpha\vee\beta)\wedge\gamma} = I_{(\alpha\wedge\gamma)\vee(\beta\wedge\gamma)},$$

Запишем структуру (7) в инфиксной нотации

$$\alpha[(\beta\{\gamma)$$

Формально раскрыв скобки, получим в инфиксной форме 2-й закон дистрибутивности (аналогичный 2-му закону дистрибутивности из теории множеств $\alpha\cup(\beta\cap\gamma)=(\alpha\cup\gamma)\cap(\beta\cup\gamma)$ или математической логики $\alpha\vee(\beta\wedge\gamma)=(\alpha\vee\gamma)\wedge(\beta\vee\gamma)$)

$$\alpha[(\beta\{\gamma) \;\Leftrightarrow\; (\alpha[\gamma)\{(\beta[\gamma), \tag{12}$$

который в префиксной записи примет вид

$$\left[\begin{array}{l}\alpha\\ \left\{\begin{array}{l}\beta\\ \gamma\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\alpha\\ \gamma\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\beta\\ \gamma\end{array}\right.\end{array}\right. \tag{13}$$

Отметим, что запись $\alpha[(\beta\{\gamma)$ более естественна и проста нежели $(\alpha[\gamma)\{(\beta[\gamma)$, т. о. 2-й закон дистрибутивности логичнее использовать в «обратном порядке» (в направлении «сворачивания» скобок)

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\alpha\\ \gamma\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\beta\\ \gamma\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha\\ \left\{\begin{array}{l}\beta\\ \gamma\end{array}\right.\end{array}\right. \tag{14}$$

В 1-м законе дистрибутивности наоборот: запись $(\alpha\{\gamma)[(\beta\{\gamma)$ на «языке систем-совокупностей»

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\alpha\\ \gamma\end{cases}\\ \begin{cases}\beta\\ \gamma\end{cases}\end{array}\right. \tag{15}$$

более понятна: она соответствует объединению пересечения решений соотношений.

Этот закон удобнее использовать в направлении «раскрытия скобок»

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\alpha\\ \beta\end{array}\right.\\ \gamma\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\alpha\\ \gamma\end{cases}\\ \begin{cases}\beta\\ \gamma\end{cases}\end{array}\right.$$

Рассмотрим в качестве обобщающего примера преобразование структуры (9)

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\alpha\\ \beta\end{cases}\\ \gamma\\ \begin{cases}\delta\\ \alpha\end{cases}\end{array}\right.$$

Запишем структуру в инфиксной форме

$$(\alpha\{\beta)[\gamma[(\delta\{\alpha),$$

далее применим коммутативность

$$(\alpha\{\beta)[\gamma[(\delta\{\alpha) \Leftrightarrow ((\alpha\{\beta)[(\alpha\{\delta))[\gamma,$$

воспользовавшись дистрибутивностью, получим

$$((\alpha\{\beta)[(\alpha\{\delta))[\gamma \Leftrightarrow (\alpha\{(\beta[\delta))[\gamma,$$

что на «языке систем-совокупностей» примет вид

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\alpha\\ \left[\begin{array}{l}\beta\\ \delta\end{array}\right.\end{cases}\\ \gamma\end{array}\right..$$

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс (профильный уровень) : методическое пособие для учителя / А. Г. Мордкович. – М. : Мнемозина, 2010. – 191 с.

2. Ван дер Варден, Б. Л. Алгебра / Б. Л. Ван дер Варден. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 623 с.

3. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – 9-е изд. – М. : Главная редакция физико-математической литературы, 1968. – 431 с.

4. Харин, Н. Н. Математическая логика и теория множеств / Н. Н. Харин. – М. : Росвузиздат, 1963. – 192 с.

5. Чёрч, А. Введение в математическую логику. Т. 1 / А. Чёрч ; пер. с англ. В. С. Черняевского ; под ред. В. А. Успенского. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1960. – 484 с.

**REFERENCES**

1. Mordkovich A.G. *Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 11 klass (profil'nyj uroven'): metodicheskoe posobie dlya uchitelya* [Algebra and the basics of mathematical analysis]. M.: Mnemozina, 2010. 191 p.

2. Van der Varden B.L. *Algebra* [Algebra]. M.: Nauka, Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoj literatury, 1979. 623 p.

3. Kurosh A.G. *Kurs vysshej algebry* [The course of higher algebra]. M.: Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoj literatury, 1968. 431 p.

4. Harin N.N. *Matematicheskaya logika i teoriya mnozhestv* [Mathematical logic and the theory of sets]. M.: Rosvuzizdat, 1963. 192 p.

5. Chyorch A. *Vvedenie v matematicheskuyu logiku* [Introduction to mathematical logic]. M.: Izdatel'stvo inostrannoj literatury, 1960. 484 p.

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СТАТЬИ**

Чубатов А.А. О преобразованиях структур (систем и совокупностей) предикатов и их свойствах / А.А. Чубатов // Вестник Армавирского государственного педагогического университета. – 2019. – № 1. – С. 35–43.

**BIBLIOGRAPHIC DESCRIPTION**

Chubatov A.A. About Transformations of Structures (Systems and Unions) Predicates and Their Properties / A.A. Chubatov // The Bulletin of Armavir State Pedagogical University, 2019, No. 1, pp. 35–43. (In Russian).